

22-23

GRADO EN MATEMÁTICAS  
SEGUNDO CURSO

# GUÍA DE ESTUDIO PÚBLICA



## **FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES II**

CÓDIGO 61022027

UNED

22-23

FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES II

CÓDIGO 61022027

# ÍNDICE

PRESENTACIÓN Y CONTEXTUALIZACIÓN  
REQUISITOS Y/O RECOMENDACIONES PARA CURSAR LA ASIGNATURA  
EQUIPO DOCENTE  
HORARIO DE ATENCIÓN AL ESTUDIANTE  
TUTORIZACIÓN EN CENTROS ASOCIADOS  
COMPETENCIAS QUE ADQUIERE EL ESTUDIANTE  
RESULTADOS DE APRENDIZAJE  
CONTENIDOS  
METODOLOGÍA  
SISTEMA DE EVALUACIÓN  
BIBLIOGRAFÍA BÁSICA  
BIBLIOGRAFÍA COMPLEMENTARIA  
RECURSOS DE APOYO Y WEBGRAFÍA

|                           |                                  |
|---------------------------|----------------------------------|
| Nombre de la asignatura   | FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES II |
| Código                    | 61022027                         |
| Curso académico           | 2022/2023                        |
| Departamento              | MATEMÁTICAS FUNDAMENTALES        |
| Título en que se imparte  | GRADO EN MATEMÁTICAS             |
| Curso                     | SEGUNDO CURSO                    |
| Periodo                   | SEMESTRE 1                       |
| Tipo                      | OBLIGATORIAS                     |
| Nº ETCS                   | 6                                |
| Horas                     | 150.0                            |
| Idiomas en que se imparte | CASTELLANO                       |

## PRESENTACIÓN Y CONTEXTUALIZACIÓN

El estudio de las funciones reales de varias variables se empieza en el curso *Funciones de varias variables I*, y en nuestro curso se continúa y profundiza en ello, tanto en la diferenciación como en la integración de estas funciones. Los temas principales que se tratarán son:

- **Teoremas de la función inversa y de la función implícita:** Uno de los problemas fundamentales es saber cuando la inversa de un función invertible es derivable y, en caso afirmativo, conocer esta derivada. En general, se estudia el mismo problema para funciones definidas de manera implícita.
- **Extremos relativos y extremos condicionados. Multiplicadores de Lagrange:** En general, las funciones continuas en conjuntos compactos siempre tienen extremos. Sin embargo, saber quienes son, no es en general sencillo. El estudio de las diferenciales, o el método de los multiplicadores de Lagrange nos ayudara a conocerlos.
- **Construcción de la integral de Riemann para funciones de  $R^n$  en  $R$ .** Se trata de construir la integral de una función de varias variables con ideas similares a cómo se hace para la integral de funciones de una variable.
- **Teorema de Fubini:** las integrales de funciones de varias variables se definen de manera iterada; por tanto, en principio la integral (doble) de una función  $f(x,y)$ , si primero se integra en  $x$  y luego en  $y$ , o si se hace al revés, podría ocurrir que los valores conseguidos son distintos. El teorema de Fubini nos dice cuando estos valores son iguales. De esta manera, una integral doble que en un orden no se conoce, haciéndolo en otro es posible que si que se sepa solucionar.
- **Teorema del Cambio de variable:** Se trata de la generalización del cambio de variable para integrales de funciones de una variable. Es posiblemente el resultado más útil para calcular integrales
- **Cálculo de áreas y volúmenes:** Al igual que las integrales de una función positiva de una variable se interpretan como el área por debajo de la gráfica de la función, las integrales dobles y triples tienen también una interpretación geométrica.

Además de saber calcular (extremos, integrales) también se pide conocer y entender bien el porqué de las cosas.

## REQUISITOS Y/O RECOMENDACIONES PARA CURSAR LA ASIGNATURA

### Conocimientos previos

Para abordar el estudio de esta digamos nueva asignatura en las mejores condiciones posibles, es conveniente que el alumno tenga conocimientos matemáticos previos de Álgebra y del Análisis Matemático.

También son muy convenientes algunos conocimientos de Inglés, a nivel de lectura al menos.

## EQUIPO DOCENTE

|                    |                           |
|--------------------|---------------------------|
| Nombre y Apellidos | JORGE LOPEZ ABAD          |
| Correo Electrónico | abad@mat.uned.es          |
| Teléfono           | 91398-7234                |
| Facultad           | FACULTAD DE CIENCIAS      |
| Departamento       | MATEMÁTICAS FUNDAMENTALES |

## HORARIO DE ATENCIÓN AL ESTUDIANTE

Jueves de 16 a 20 horas

## TUTORIZACIÓN EN CENTROS ASOCIADOS

## COMPETENCIAS QUE ADQUIERE EL ESTUDIANTE

CE1 - Razonamiento crítico, capacidad de evaluar trabajos propios y ajenos

CEA4 - Habilidad para detectar inconsistencias de razonamiento ya sea de forma teórica o práctica mediante la búsqueda de contraejemplos

CEA7 - Habilidad para presentar el razonamiento matemático y sus conclusiones de manera clara y precisa, de forma apropiada a la audiencia a la que se dirige, tanto en la forma oral como escrita

CEA8 - Capacidad de relacionar distintas áreas de las matemáticas

CED1 - Comprensión de los conceptos básicos y familiaridad con los elementos fundamentales para el estudio de las Matemáticas superiores

CED2 - Destreza en el razonamiento cuantitativo, basado en los conocimientos adquiridos

CG10 - Comunicación y expresión escrita

CG13 - Comunicación y expresión matemática, científica y tecnológica

CG4 - Análisis y Síntesis

CG5 - Aplicación de los conocimientos a la práctica

CG6 - Razonamiento crítico

## RESULTADOS DE APRENDIZAJE

- Dominar los Teoremas de la Función Inversa e Implícita. Introducirse en los conceptos de variedades diferenciales.
- Aplicación de los teoremas de los Multiplicadores de Lagrange. Problemas de optimización.
- Estudiar el concepto de integral de funciones escalares de varias variables. Saber plantear y resolver integrales de funciones de varias variables. Aplicar al cálculo de volúmenes y cuerpos de densidad variable.
- Dominar los teoremas básicos de Fubini y Cambio de Variable. Aplicaciones a casos concretos.
- Resolver problemas que impliquen el planteamiento de integrales (longitudes, áreas, volúmenes, centros de gravedad, etc.)

## CONTENIDOS

### 1. EXTREMOS DE FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

(Sección 3.3 del libro de texto).

Se trata de

- estudiar los extremos locales de una función real de varias variables con su diferencial y su Hessiana.
- cuando un extremo local es un extremo global

## 2. METODO DE LOS MULTIPLICADORES DE LAGRANGE. EXTREMOS CONDICIONADOS.

(Sección 3.4 del libro de texto).

Es bien sabido que la imagen continua de un compacto es compacto, y por tanto toda función continua real de varias variables tiene máximos y mínimos cuando en cualquier compacto. La cuestión es saber cómo calcularlos. Cuando el compacto en cuestión se puede parametrizar razonablemente y la función es lo suficientemente suave, entonces se puede usar el método de los multiplicadores de Lagrange para calcularlos.

La demostración completa usa el Teorema de la función implícita, que se estudia a continuación.

## 3. TEOREMA DE LA FUNCIÓN IMPLICITA E INVERSA

(Sección 3.5 del libro de texto).

Supongamos que dada una ecuación  $F(x,y)=0$ , siendo  $x,y$  vectores, se conoce que para cada  $x$  existe un único  $y$  tal que  $(x,y)$  son solución de la ecuación. En este caso, tenemos definida una función que asigna a cada vector  $x$  el correspondiente  $y$ , y que llamaremos  $g$ . Resulta natural pensar que si  $F$  es una función muy regular (con diferenciales), entonces  $g$  también lo será. El teorema de la función implícita hace este estudio, en general, incluso si no se conoce explícitamente la función  $g$  (y que es casi siempre así).

## 4. FUNCIONES VECTORIALES DE VARIABLE VECTORIAL

(Capítulo 4 del libro de texto)

Se empieza el estudio de las funciones de varias variables con valores vectoriales, es decir funciones  $f:R^m \rightarrow R^n$ . Se introduce la longitud de un arco en  $R^n$ , la divergencia y el rotacional.

## 5. INTEGRALES DOBLES Y TRIPLES

(Capítulo 5 del libro de texto)

Estudiaremos la integración (de Riemann) de funciones reales de dos y tres variables, o integrales

dobles y triples. Al igual que la integral de una función positiva de una variable representa el área por debajo de gráfica de la función, la integral de una función positiva  $f:R^2 \rightarrow R$  representa el volumen debajo de la gráfica de  $f$ , y se puede definir rigurosamente como límite de sumas aproximantes. La integral triple se define de manera similar, aunque su

interpretación geométrica es más difícil de imaginar (se trata de un "volumen 4-dimensional")

## 7. TEOREMA DEL CAMBIO DE VARIABLE

(Capítulo 6 del libro de texto)

Posiblemente el teorema más útil en la teoría de integración. Se basa en el principio de que la longitud, área o volumen de un segmento, rectángulo, paralelepípedo (respectivamente) son invariantes bajo traslaciones. De aquí se sigue directamente que la integral es invariante bajo cambio de coordenadas afines no-triviales, y en general también bajo cambios suficientemente regulares (cuando la función se aproxime localmente por funciones lineales)

## 8. INTEGRALES IMPROPIAS

(Sección 6.4 del libro de texto)

Se estudian las integrales de funciones de varias variables sobre límites no necesariamente acotados. Son las denominadas integrales impropias, y son límites de integrales sobre dominios acotados.

## METODOLOGÍA

El plan de trabajo se referirá al texto base *Cálculo Vectorial* (J. E. Marsden y A. J. Tromba, Pearson). En él se fijan tanto los contenidos del estudio como la notación, que puede cambiar en los distintos libros que tratan de la materia.

Gran parte de la formación recae sobre el trabajo personal del alumno con la bibliografía recomendada, básica y complementaria, siempre con la ayuda del profesor de la Sede Central de la UNED, los tutores y las tecnologías de ayuda de la UNED. Los contactos con el profesor pueden ser: presenciales en la Sede Central, por teléfono, email, correo postal, y el curso virtual.

Se hará hincapié en el curso virtual, porque está probando ser una herramienta de enorme utilidad para los estudiantes en los últimos años: En el foro docente-guardia virtual, donde los alumnos consultan al profesor cuestiones específicas de la asignatura que serán atendidas por éste y por distintos ProfesoresTutores.. En el foro de consultas generales, donde se plantearán preferentemente cuestiones de carácter burocrático, de gestión o de procedimientos de evaluación. En el foro de alumnos, donde se podrán comunicar con los otros alumnos; no es un foro tutelado, por lo que los profesores no se responsabilizarán del contenido del mismo.

Finalmente, se podrán crear foros de cuestiones concretas: conjuntos, relaciones, etc... que consistirán en preguntas orientadas a la profundización y comprensión de los estudiantes; estarán abiertos durante un tiempo en el cual se contestarán los alumnos entre sí, participando el profesor sólo cuando lo considere necesario.

## SISTEMA DE EVALUACIÓN

### TIPO DE PRUEBA PRESENCIAL

|                                 |                      |
|---------------------------------|----------------------|
| Tipo de examen                  | Examen de desarrollo |
| Preguntas desarrollo            | 3                    |
| Duración del examen             | 120 (minutos)        |
| Material permitido en el examen |                      |

ninguno

### Criterios de evaluación

|  |     |
|--|-----|
| % del examen sobre la nota final                                 | 100 |
| Nota del examen para aprobar sin PEC                             | 5   |
| Nota máxima que aporta el examen a la calificación final sin PEC | 10  |
| Nota mínima en el examen para sumar la PEC                       | 4   |

### Comentarios y observaciones

Existirá la posibilidad de realizar una PEC, siempre de carácter voluntario, pero constituyendo una práctica recomendable, contando hasta un +1 punto sobre la nota final.

### PRUEBAS DE EVALUACIÓN CONTINUA (PEC)

¿Hay PEC? Si

### Descripción

Se tratará de resolver una lista de 3 ejercicios (0.2 cada uno) y desarrollar un tema teórico (0.4 puntos)

### Criterios de evaluación

Dependiendo de la calidad de las respuestas, se sumará hasta un punto a la nota de la Prueba Presencial, hasta un máximo de 10. En otro caso no se sumará ni restará nada a dicha nota.

Ponderación de la PEC en la nota final Hasta +1 punto

Fecha aproximada de entrega Diciembre

### Comentarios y observaciones

En el examen podrán aparecer tanto ejercicios o problemas, como demostraciones o preguntas teóricas. En todas las respuestas, será necesario entender bien lo que se hace. Podrán aparecer cuestiones cuyo objetivo sea comprobar esa comprensión, a la que se dará importancia.

### OTRAS ACTIVIDADES EVALUABLES

¿Hay otra/s actividad/es evaluable/s? No

### Descripción

### Criterios de evaluación

Ponderación en la nota final



Fecha aproximada de entrega

Comentarios y observaciones

### ¿CÓMO SE OBTIENE LA NOTA FINAL?

Se hará la evaluación aplicando la fórmula:

**Mínimo{PP + PEC, 10} (siempre que la nota de la PP sea mayor o igual que 4, en otro caso la nota final es la de la PP).**

## BIBLIOGRAFÍA BÁSICA

ISBN(13):9788478290697

Título:CÁLCULO VECTORIAL (5ª)

Autor/es:Tromba, Anthony J. ; Marsden, Jerrold E. ;

Editorial:PEARSON ADDISON-WESLEY

## BIBLIOGRAFÍA COMPLEMENTARIA

Existen muchos otros libros de texto que, si conviene, se discutirán en los foros.

## RECURSOS DE APOYO Y WEBGRAFÍA

1. *Curso virtual*, donde se encuentran materiales de apoyo al estudio, el acceso al foro y los correos electrónicos de profesores y alumnos, junto con laboratorios informáticos para el uso de programas de apoyo al estudio, etc.

2. *Programa MAXIMA, de cálculo simbólico libre*:

<https://maxima.sourceforge.io/es/>

3. *Editor GEOGEBRA, un programa de geometría dinámica*:

<https://www.geogebra.org/>

---

## IGUALDAD DE GÉNERO

En coherencia con el valor asumido de la igualdad de género, todas las denominaciones que en esta Guía hacen referencia a órganos de gobierno unipersonales, de representación, o miembros de la comunidad universitaria y se efectúan en género masculino, cuando no se hayan sustituido por términos genéricos, se entenderán hechas indistintamente en género femenino o masculino, según el

sexo del titular que los desempeñe.