22-23

GRADO EN MATEMÁTICAS
CUARTO CURSO

GUÍA DE ESTUDIO PÚBLICA

INTEGRAL DE LEBESGUE

CÓDIGO 6102401-

UNED

22-23

INTEGRAL DE LEBESGUE

CÓDIGO 6102401-

ÍNDICE

Nombre de la asignatura	INTEGRAL DE LEBESGUE
Código	6102401-
Curso académico	2022/2023
Departamento	MATEMÁTICAS FUNDAMENTALES
Título en que se imparte	GRADO EN MATEMÁTICAS
Curso	CUARTO CURSO
Periodo	SEMESTRE 1
Tipo	OPTATIVAS
Nº ETCS	5
Horas	125.0
Idiomas en que se imparte	CASTELLANO

PRESENTACIÓN Y CONTEXTUALIZACIÓN

El objetivo general de la asignatura es presentar las nociones básicas de la integral de Lebesgue, junto con su conexión y aplicaciones a otras ramas de las Matemáticas y de otras Ciencias.

La "Integral de Lebesgue” es una asignatura que en el plan de estudios de la titulación, Grado en Matemáticas, figura en el primer semestre del cuarto curso. Tiene carácter optativo y se le asignan 5 créditos.

La integral de una función real positiva y continua *f* , definida en un intervalo [a.b] (siendo a y b números reales, con af, en un sentido que se puede precisar. Esto es fácil de entender para ciertas funciones que nos son familiares , pero... ¿qué quiere decir para funciones un poco más exóticas o con comportamiento errático, o más generales? ¿Cuál es la clase de funciones para las cuales el concepto de "área bajo la curva" tiene sentido? La respuesta a esta interrogante tiene importancia teórica y práctica fundamental, y ha ido evolucionando con distintas aproximaciones y generalizaciones a lo largo de la Historia, lo cual es muy conveniente conocer.

Como parte del avance de las matemáticas en el siglo XIX, se hicieron varios intentos de fundamentar con rigor el cálculo integral. La integral de Riemann propuesta por Bernhard Riemann (1826-1866), sentó la primera base sólida sobre la cual se desarrolló la integral. La definición de Riemann empieza con la construcción de una sucesión de áreas rectangulares fácilmente calculables cuya suma converge a la integral de una función dada. Esta definición es buena en el sentido de que provee las repuestas adecuadas y esperadas para muchos problemas ya resueltos, así como importantes y útiles resultados para muchos otros problemas.

Sin embargo, la integración de Riemann no llega a resolver ciertos casos. La integración de una función real continua no negativa definida en R (por considerar sólo el caso más simple) puede considerarse como el área entre la gráfica de una curva y el eje de abcisas. La **Integral de Lebesgue**, propuesta por Henri Lebesgue (1875-1941), extiende el concepto de integración a una clase mucho más amplia de funciones, así como a los posibles dominios en los cuales estas integrales pueden definirse. Hacía mucho que se sabía que para funciones no negativas con una curva suficientemente suave (como una función continua en intervalos cerrados), el área bajo la curva podía definirse como alguna integral y calcularse usando técnicas de aproximación de la región mediante rectángulos o polígonos. Pero como se necesitaba considerar funciones más irregulares, se hizo evidente que una aproximación más cuidadosa sería necesaria para definir una integral que se ajustara a dichos problemas.

La integración de Riemann tampoco funciona bien al tomar ciertos límites de determinadas sucesiones de funciones, dificultando su análisis. Esto es algo de vital importancia, por ejemplo, en el estudio de las series de Fourier, la transformada de Fourier y otros temas. La integral de Lebesgue permite saber, de forma más general, cómo y cuándo es posible tomar límites bajo el signo de la integral.

La definición de Lebesgue también hace posible calcular integrales para una clase más amplia de funciones. Por ejemplo, la función de Dirichlet, que es 0 cuando su argumento es irracional y 1 en otro caso (racional), tiene integral de Lebesgue, pero no de Riemann.

En este contexto, esta asignatura, optativa del cuarto curso del Grado en Matemáticas, pretende conseguir que los alumnos conozcan la definición y las propiedades básicas de la integral de Lebesgue y el papel que desempeña en el Análisis Real y en muchas otras ramas de las Matemáticas. Otras integrales han sido propuestas para resolver los problemas que aquellas no terminaban de resolver, algunas en contextos mucho más generales, aunque ello ya escapa del objetivo de esta asignatura.

Esta asignatura de grado tiene su extensión natural en la asignatura *Teoría de la Medida* del Máster universitario en Matemáticas avanzadas.

REQUISITOS Y/O RECOMENDACIONES PARA CURSAR LA ASIGNATURA

Para abordar el estudio de esta asignatura , es necesario que el alumno tenga conocimientos básicos en Análisis Matemático y en Álgebra.

EQUIPO DOCENTE

Nombre y Apellidos	JORGE LOPEZ ABAD (Coordinador de asignatura)
Correo Electrónico	abad@mat.uned.es
Teléfono	91398-7234
Facultad	FACULTAD DE CIENCIAS
Departamento	MATEMÁTICAS FUNDAMENTALES

HORARIO DE ATENCIÓN AL ESTUDIANTE

Equipo docente de la asignatura (desde este curso):
Fidel José Fernández y Fernández-Arroyo
Despacho 118
Departamento de Matemáticas Fundamentales
Facultad de Ciencias de la UNED
Paseo Senda del Rey, 9

28040-Madrid
Horario de atención al alumno:
Jueves lectivos de 16:00 a 20:00.
Teléfono: 91-3987226
Correo electrónico:
ffernan@mat.uned.es
(Es preferible utilizar el correo electrónico del curso virtual, o el foro, o el teléfono).
La tutorización y seguimiento se llevará a cabo en las guardias (para las cuales, el horario es el antes indicado), y también en el foro de la asignatura del curso virtual. En este foro, las preguntas y respuestas son visibles para todos los alumnos, y también se da la oportunidad de que todos participen en los debates o conversaciones.

TUTORIZACIÓN EN CENTROS ASOCIADOS

COMPETENCIAS QUE ADQUIERE EL ESTUDIANTE

CE1 - Razonamiento crítico, capacidad de evaluar trabajos propios y ajenos

CEA4 - Habilidad para detectar inconsistencias de razonamiento ya sea de forma teórica o práctica mediante la búsqueda de contraejemplos

CEA7 - Habilidad para presentar el razonamiento matemático y sus conclusiones de manera clara y precisa, de forma apropiada a la audiencia a la que se dirige, tanto en la forma oral como escrita

CEA8 - Capacidad de relacionar distintas áreas de las matemáticas

CED1 - Comprensión de los conceptos básicos y familiaridad con los elementos fundamentales para el estudio de las Matemáticas superiores

CED2 - Destreza en el razonamiento cuantitativo, basado en los conocimientos adquiridos

CG10 - Comunicación y expresión escrita

CG13 - Comunicación y expresión matemática, científica y tecnológica

CG4 - Análisis y Síntesis

CG5 - Aplicación de los conocimientos a la práctica

CG6 - Razonamiento crítico

RESULTADOS DE APRENDIZAJE

Conocer y comprender ciertas clases de conjuntos (anillos, álgebras, -anillos, -álgebras, etc.), y sus propiedades.
Conocer bien las medidas aditivas, completamente aditivas (o -aditivas), y exteriores.
Conocer las funciones medibles e integrables, así como sus propiedades.
Conocer bien los teoremas de convergencia, en relación con la integración; incluido el teorema de convergencia dominada de Lebesgue.
Conocer la complección de una medida y en particular, de un producto de medidas.
Entender y saber aplicar y demostrar los teoremas fundamentales, como son el de Egoroff, el de Lusin, el de de Fubini, o el de Radon-Nikodym, entre otros.
Saber dar diferentes ejemplos de las clases fundamentales que existen de conjuntos.
Poder manejar la medida de Lebesgue y sus propiedades.
Comprender bien los Teoremas de Egoroff y de Lusin.
Manejar con soltura distintos tipos de integrales; sobre todo, la de Lebesgue y la de Riemann.
Familiarizarse con los productos de espacios medibles y de espacios de medidas.
Saber demostrar el teorema de Fubini y los teoremas de convergencia para la integral de Lebesgue.
Y las demás cuestiones que aparecen en los contenidos.

CONTENIDOS

CONSTRUCCION DE LA MEDIDA DE LEBESGUE, Y PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES MEDIBLES

UNIDAD DIDÁCTICA I (6 del libro)

Tema 1 (19 del libro). *Clases de conjuntos (I)*.
1. Anillos de conjuntos.
2. Un anillo de intervalos.
3. Álgebras de conjuntos.

Tema 2 (20 del libro). *Clases de conjuntos* (II).
1.Definición y propiedades de los -anillos.
2.Definición y propiedades de las -álgebras.
3. Clases monótonas.

Tema 3 (21 del libro). *Medida y medida exterior*.

1. Medidas aditivas sobre un anillo.
2. Medidas sobre un anillo.
3. Medidas exteriores sobre un -anillo hereditario.

Tema 4 (22 del libro). *Extensiones de medidas*.

1. Teorema de extensión de Hahn.
2. Extensiones de medidas -finitas.

Tema 5 (23 del libro). *Medida de Lebesgue-Stieltjes en R*.

1. Medida de Lebesgue-Stieltjes en R.
2. Medida de Lebesgue en R.

Tema 6 (24 del libro). *Funciones medibles*.

1. Propiedades de las funciones medibles.
2. Teorema de Egoroff.
3. Teorema de Lusin.

INTEGRAL DE LEBESGUE. TEOREMAS DE CONVERGENCIA Y OTROS RESULTADOS

UNIDAD DIDÁCTICA II (5 del libro)

Tema 7 (25 del libro). *Integración (I)*.

1. Integrales de funciones no negativas.
2. Aditividad de la integral con respecto al integrando.
3. Teoremas de convergencia.

Tema 8 (26 del libro). *Integración (II)*.

1. Funciones integrables e integrales.
2. Propiedades elementales de la integral.
3. Teorema de la convergencia dominada de Lebesgue.

Tema 9 (27 del libro). *Productos de espacios medidas (I)*.

1. Productos de espacios medibles.
2. Productos de espacios medidas.
3. Medida de Lebesgue en R^n .

Tema 10 (28 del libro). *Productos de espacios medidas (II).*

1. Productos tensoriales de medidas.
2. Teoremas de Fubini y de Hobson Tonelli.
3. Complección del producto de medidas.

Tema 11 (36 del libro). *Espacios de Lebesgue.*

1. Desigualdades fundamentales.
2. Teoremas de convergencia.
3. Espacios $L^p(\mu)$, 1p< .
4. El espacio L(μ).
5. El espacio conjugado de $L^1(\mu)$.
6. Los espacios conjugados de $L^p(\mu)$, 1<p< .
7. Propiedades de densidad.

MEDIDAS SIGNADAS; DESCOMPOSICIONES DE MEDIDAS; EL TEOREMA DE RADON-NIKODYM

UNIDAD DIDÁCTICA III (2 del libro)

Tema 12 (29 del libro). *Medidas signadas*.

1. Propiedades elementales de las medidas signadas.
2. Teoremas de Hahn y de Jordan.
3. Las integrales como medidas signadas.

Tema 13 (30 del libro). *Medidas complejas.*

1. Propiedades elementales de las medidas complejas.
2. Teorema de Radon-Nikodym.
3. Descomposición de Lebesgue.

En el curso virtual se podrán realizar indicaciones o modificaciones relativas a estos temas.

METODOLOGÍA

En cada capítulo se debe llevar a cabo el estudio del siguiente modo:
- Estudio y comprensión del texto base.
- Realización de los ejercicios propuestos.
- Realización de actividades complementarias si se indican.

Se propondrán dos ejercicios optativo de evaluación continua. (Ver sección sobre evaluación).

SISTEMA DE EVALUACIÓN

TIPO DE PRUEBA PRESENCIAL

Tipo de examen	Examen de desarrollo
Preguntas desarrollo	
Duración del examen	120 (minutos)
Material permitido en el examen	

Ninguno.

Criterios de evaluación

En todos los ejercicios, problemas, y demostraciones, será necesario entender bien lo que se hace. Se podrán poner preguntas para comprobar esa comprensión, que es muy importante.

% del examen sobre la nota final	80
Nota del examen para aprobar sin PEC	5
Nota máxima que aporta el examen a la calificación final sin PEC	10
Nota mínima en el examen para sumar la PEC	0
Comentarios y observaciones	

En el examen podrán aparecer tanto ejercicios o problemas, como demostraciones o preguntas teóricas. En todas las respuestas, será necesario entender bien lo que se hace. Podrán aparecer cuestiones cuyo objetivo sea comprobar esa comprensión, a la que se dará importancia.

PRUEBAS DE EVALUACIÓN CONTINUA (PEC)

¿Hay PEC?	Si
Descripción	

La evaluación de esta asignatura se hará a través de 2 trabajos y el examen presencial.

Los dos trabajos serán:

El primero será la resolución de cinco ejercicios, tanto teóricos como prácticos. Los ejercicios serán sobre propiedades elementales de las medidas y funciones medibles e integrables. Se deberá de entregar al final del primer tercio-mitad del curso (aproximadamente)

El segundo trabajo será desarrollar uno de los temas introducidos en el curso (por ejemplo los espacios L_p). Se deberá de entregar casi al final del curso.

Cada trabajo se evaluará sobre 10 puntos.

Criterios de evaluación

En todos los ejercicios, problemas, y demostraciones, será necesario entender bien lo que se hace.

Se podrán poner preguntas para comprobar esa comprensión, que es muy importante.

Ponderación de la PEC en la nota final	Cada trabajo suma como máximo 1 punto de la nota final. Cada nota, en el caso de que sea igual o superior a medio punto, se utilizará en la fórmula que computa la nota final, y que está explicada más adelante.
Fecha aproximada de entrega	1er trabajo: hacia la mitad del curso; 2do trabajo: al final del curso.

Comentarios y observaciones

En todos los ejercicios, problemas, y demostraciones, será necesario entender bien lo que se hace.

Se podrán poner preguntas para comprobar esa comprensión, que es muy importante.

OTRAS ACTIVIDADES EVALUABLES

¿Hay otra/s actividad/es evaluable/s?	No
Descripción	
Criterios de evaluación	
Ponderación en la nota final	0
Fecha aproximada de entrega	
Comentarios y observaciones	

¿CÓMO SE OBTIENE LA NOTA FINAL?

Sea

EX:= nota del examen presencial (sobre 10 puntos)

T:= suma de la nota del primer trabajo y el segundo trabajo (sobre 10 puntos)

NF:=nota final (sobre 10 puntos)

Hay varios casos:

Si EX es mayor o igual a 4, entonces NF = max (EX, (4/5)EX + (1/5)T)

Si EX es menor a 4, entonces NF=EX

BIBLIOGRAFÍA BÁSICA

ISBN(13):9788436223323
Título:ANÁLISIS MATEMÁTICO V ([1ª ed., 1ª reimp.])
Autor/es:Valdivia Ureña, Manuel ;
Editorial:Universidad Nacional de Educación a Distancia

El libro de texto es el **Segundo Tomo** del *“Análisis Matemático V”*, del profesor Manuel Valdivia Ureña, editado por la UNED. Existen otros textos, la mayoría en inglés, que también pueden ser útiles. Algunos de ellos se incluyen en la bibliografía complementaria.

BIBLIOGRAFÍA COMPLEMENTARIA

ISBN(13):9780070619876
Título:REAL AND COMPLEX ANALYSIS (3ª)
Autor/es:W.Rudin ;
Editorial:MHHE

ISBN(13):9780134689494
Título:REAL ANALYSIS (4ª)
Autor/es:P. M. Fitzpatrick ; H. L. Royden ;
Editorial:PEARSON

ISBN(13):9780691113869
Título:REAL ANALYSIS MEASURE THEORY, INTEGRATION, AND HILBERT SPACES (1ª)
Autor/es:Rami Shakarchi ; Elias M. Stein ;
Editorial:PRINCETON UNIVERSITY PRESS

ISBN(13):9781468494402
Título:MEASURE THEORY (Segunda)
Autor/es:Paul R. Halmos ;
Editorial:Biirkhäuser-Springer

ISBN(13):9781468494426
Título:MEASURE THEORY
Autor/es:P. Halmos ;
Editorial:SPRINGER-VERLAG

ISBN(13):9788420506319

Título:INTEGRACIÓN : TEORÍA Y TÉCNICAS
Autor/es:Rubio, Baldomero ; Miguel De Guzman ;
Editorial:Alhambra

•Se pone a disposición de los alumnos unos apuntes personales.
•Existen otras ediciones del libro *Real Analysis* (Royden). La tercera edición también es recomendable.

RECURSOS DE APOYO Y WEBGRAFÍA

Curso virtual donde también se encuentran el foro y correos electrónicos de profesor y alumnos, y la atención a los alumnos en las guardias.

IGUALDAD DE GÉNERO

En coherencia con el valor asumido de la igualdad de género, todas las denominaciones que en esta Guía hacen referencia a órganos de gobierno unipersonales, de representación, o miembros de la comunidad universitaria y se efectúan en género masculino, cuando no se hayan sustituido por términos genéricos, se entenderán hechas indistintamente en género femenino o masculino, según el sexo del titular que los desempeñe.